

GV1:.....

THI HK1 KHÓA 18
Môn: TOÁN CHUYÊN ĐỀ
(Tg 60 phút. SV không sử dụng tài liệu)

GV2:.....

Phần 1: HÀM BIẾN SỐ PHỨC

CÂU	ĐỀ 1	ĐÁP ÁN
1 (1đ)	Giải phương trình: $e^z = \frac{(1+2i)(i+\sqrt{3})}{2-i}$.	$z = \ln 2 + (\frac{2\pi}{3} + k2\pi)i$.
2 (1đ)	Cho hàm $u = x + x^2 + y - y^2$. Tìm hàm v sao cho $f(z) = u + iv$ giải tích.	$v = -x + y + 2xy$.
3 (1đ)	Tính đạo hàm của $f(z) = xy^2 + (3y - x^2y)i$ tại: $z_1 = \sqrt{2} - i, z_2 = 1 + i, z_3 = 1 - \sqrt{3}i$ nếu có.	$f'(z_1) = 1 + 2\sqrt{2}i$
4 (1đ)	Tính $\int_1^i (x - y + 1) dz$ dọc theo $(d): x + y = 1$	$I = i - 1$
5 (1đ)	Tính tích phân: $I = \int_C \frac{e^{2z}}{(z-1)(z-3)^2} dz$. $C: z = 2$.	$I = \frac{e^2 \pi i}{2}$
6 (1đ)	Trong các hàm sau, hàm nào là hàm điều hòa? $U = x^3 - 3xy^2 + xy; H = x^2y - xy^2; G = x^3 + xy$.	Hàm điều hòa là: U
7 (1đ)	Tìm hàm giải tích trong các hàm sau, nếu có? $g = x + y + 2xy + (-x + y - 2x^2 + y^2)i$ $h = e^x \sin y + 2xy + (-e^x \cos y - x^2 + y^2)i$	Hàm giải tích là: h
8 (1đ)	Cho $\cos x = -\frac{2}{\sqrt{5}}; 90^\circ < x < 180^\circ$. Tìm $\sin x$? và $\tan x$?	$a / \sin x = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad b / \tan x = -\frac{1}{2}$

Phần 2: PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE

9 / (1đ). Tìm $L \left\{ \sin \left(3t + \frac{\pi}{6} \right) \right\} = L \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 3t + \frac{1}{2} \cos 3t \right\} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3}{z^2 + 9} + \frac{1}{2} \cdot \frac{z}{z^2 + 9}$

10/ (1đ). Tìm $L^{-1} \left\{ \frac{2z-4}{(z-2)^2 + 9} \right\} = e^{2t} L^{-1} \left\{ \frac{2z}{z^2 + 9} \right\} = 2e^{2t} \cos 3t$

GV1:.....

THI HK1 KHÓA 18
Môn: TOÁN CHUYÊN ĐỀ
(Tg 60 phút. SV không sử dụng tài liệu)

GV2:.....

Phần 1: HÀM BIẾN SỐ PHỨC

CÂU	ĐỀ 2	ĐÁP ÁN
1 (1đ)	Giải phương trình: $e^z = \frac{(3+i\sqrt{2})(1+i\sqrt{3})}{\sqrt{2}-3i}$.	$z = \ln 2 + \left(\frac{5\pi}{6} + k2\pi\right)i$.
2 (1đ)	Cho hàm $u = x - x^2 - y + y^2$. Tìm hàm v sao cho $f(z) = u + iv$ giải tích.	$v = x + y - 2xy$
3 (1đ)	Tính đạo hàm của $f(z) = (2xy + 3y^2) + (-2x^3 - x^2 + y^2)i$ tại: $z_1 = 1 + 2i, z_2 = 3 + i, z_3 = -1 + i$ nếu có.	$f'(z_3) = 2 - 4i$
4 (1đ)	Tính tích phân: $I = \int_0^{1+i} (x^2 + y)dz$ dọc theo $(P): y = x^2$	$I = \frac{2}{3} + i$
5 (1đ)	Tính tích phân: $I = \int_C \frac{z^2 - 2}{(z-1)^2(z-3)} dz$. $C: z-4 = 2$.	$I = \frac{7\pi i}{2}$.
6 (1đ)	Trong các hàm sau, hàm nào là hàm điều hòa? $U = y^2 + x^2 + e^x \cos y; H = x^2 - y^2 + e^y \cos x; G = x^2 + xy^2$.	Hàm điều hòa là: H
7 (1đ)	Tìm hàm giải tích trong các hàm sau, nếu có? $h = -x + y + 4xy + (x - y + 2x^2 + 2y^2)i$. $f = -x - 2xy + (x^2 - y - y^2)i$.	Hàm giải tích là: f
8 (1đ)	Cho $\sin x = -\frac{3}{\sqrt{10}}; 180^\circ < x < 270^\circ$. Tìm $\cos x$? và $\tan x$?	$a / \cos x = -\frac{1}{\sqrt{10}} \quad b / \tan x = 3$

Phần 2: PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE

9 / (1đ). Tìm $L \left\{ \cos \left(3t + \frac{\pi}{3} \right) \right\} = L \left\{ \frac{1}{2} \cos 3t - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 3t \right\} = \frac{1}{2} \frac{z}{z^2 + 9} - \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{3}{z^2 + 9}$

10/ (1đ). Tìm $L^{-1} \left\{ \frac{3z+3}{(z+1)^2 + 25} \right\} = e^{-t} L^{-1} \left\{ \frac{3z}{z^2 + 25} \right\} = 3e^{-t} \cos 5t$

GV1:.....

THI HK1 KHÓA 18
Môn: TOÁN CHUYÊN ĐỀ
(Tg 60 phút. SV không sử dụng tài liệu)

GV2:.....

Phần 1: HÀM BIẾN SỐ PHỨC

CÂU	ĐỀ 3	ĐÁP ÁN
1 (1đ)	Giải phương trình: $e^z = (3 + i\sqrt{3})^2$.	$z = \ln 12 + (\frac{\pi}{3} + k2\pi)i$.
2 (1đ)	Cho hàm $u = x^2 + y - y^2$. Tìm hàm v sao cho $f(z) = u + iv$ giải tích.	$v = -x + 2xy$.
3 (1đ)	Tính đạo hàm của $f(z) = -x^2 - y^2 + (2xy + y^2)i$ tại: $z_1 = 1 + 3i, z_2 = 1 - 2i, z_3 = 2 + i$ nếu có.	$f'(z_2) = -2 - 4i$
4 (1đ)	Tính: $I = \int_0^{i+1} (x^2 - iy)dz$ dọc theo $(P): y = x^2$	$I = \frac{5}{6} + \frac{i}{6}$
5 (1đ)	Tính tích phân: $I = \int_C \frac{-z^2 + 2}{z^2 - 9} dz$. $C: z - 3 = 1$.	$I = -\frac{7\pi i}{3}$
6 (1đ)	Trong các hàm sau, hàm nào là hàm điều hòa? $U = y^2 + x^2 + e^y \cos x; H = e^x \cos y - x^2; G = e^y \sin x + e^x \cos y$.	Hàm điều hòa là: G
7 (1đ)	Tìm hàm giải tích trong các hàm sau, nếu có? $f = x + 2y + 2xy + (2x + x^2 + y + y^2)i$. $g = -2y + y^2 - x - x^2 + (-y + 2x - 2xy)i$.	Hàm giải tích là: g
8 (1đ)	Cho $\tan x = -\frac{2}{\sqrt{5}}; 270^\circ < x < 360^\circ$. Tìm $\cos x$? và $\sin x$?	$a / \cos x = \frac{\sqrt{5}}{3} \quad b / \sin x = -\frac{2}{3}$

Phần 2: PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE

9 / (1đ). Tìm $L\{\sin t \sin 4t\} = L\left\{\frac{\cos 3t - \cos 5t}{2}\right\} = \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z^2 + 9} - \frac{z}{z^2 + 25}\right)$.

10/ (1). Tìm $L^{-1}\left\{\frac{2z - 6}{(z - 3)^2 + 16}\right\} = e^{3t} L^{-1}\left\{\frac{2z}{z^2 + 16}\right\} = 2e^{3t} \cos 4t$.

GV1:.....

THI HK1 KHÓA 18
Môn: TOÁN CHUYÊN ĐỀ
(Tg 60 phút. SV không sử dụng tài liệu)

GV2:.....

Phần 1: HÀM BIẾN SỐ PHỨC

CÂU	ĐỀ 4	ĐÁP ÁN
1 (1đ)	Giải phương trình: $e^z = (1+i\sqrt{3})(\sqrt{3}-i)$.	$z = \ln 4 + \left(\frac{\pi}{6} + k2\pi\right)i$.
2 (1đ)	Cho hàm $u = x^2 - y - y^2$. Tìm hàm v sao cho $f(z) = u + iv$ giải tích.	$v = x + 2xy$
3 (1đ)	Tính đạo hàm của $f(z) = 3x^2 - y^2 + (2xy + y^2)i$ tại: $z_1 = 1 + 3i, z_2 = 3 + i, z_3 = 1 + 2i$ nếu có.	$f'(z_3) = 6 + 4i$
4 (1đ)	Tính: $\int_0^{1+i} (2x - iy^2) dz$ dọc theo $(d): y = x$	$I = (1 - \frac{1}{3}i)(1 + i) = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}i$
5 (1đ)	Tính tích phân: $I = \int_C \frac{e^z}{(z-1)^2(z+3)} dz$. $C: z+3 =1$	$I = \frac{e^{-3}\pi i}{8}$.
6 (1đ)	Trong các hàm sau, hàm nào là hàm điều hòa? $U = y^2 - x^2 - e^y \cos x; H = x^2 - y^2 + xe^y; G = x^2 + xy^2$.	Hàm điều hòa là: U
7 (1đ)	Tìm hàm giải tích trong các hàm sau, nếu có? $f = x + 2y + 2xy + (2x + x^2 + y + y^2)i$. $k = x + 2y + 2xy + (-2x - x^2 + y + y^2)i$.	Hàm giải tích là: k
8 (1đ)	Cho $\cot x = -\frac{3}{\sqrt{5}}; 90^\circ < x < 180^\circ$. Tìm $\cos x$? và $\sin x$?	$a / \cos x = -\frac{3\sqrt{14}}{14}$ $b / \sin x = \frac{\sqrt{70}}{14}$

Phần 2: PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE

9 / (1đ). Tìm $L\{\sin t \cos 4t\} = L\left\{\frac{\sin 5t - \sin 3t}{2}\right\} = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{z^2 + 25} - \frac{3}{z^2 + 9}\right)$.

10/ (1đ). Tìm $L^{-1}\left\{\frac{5z+15}{(z+3)^2+16}\right\} = e^{-3t}L^{-1}\left\{\frac{5z}{z^2+16}\right\} = 5e^{-3t} \cos 4t$.

GV1:.....

THI HK1 KHÓA 18
Môn: TOÁN CHUYÊN ĐỀ
(Tg 60 phút. SV không sử dụng tài liệu)

GV2:.....

Phần 1: HÀM BIẾN SỐ PHỨC

CÂU	ĐỀ 5	ĐÁP ÁN
1 (1đ)	Giải phương trình: $e^z = (\sqrt{3} + i)(-1 + i\sqrt{3})$.	$z = \ln 4 + (\frac{5\pi}{6} + k2\pi)i$.
2 (1đ)	Cho hàm $u = x - y + 2xy$. Tìm hàm v sao cho $f(z) = u + iv$ giải tích.	$v = x - x^2 + y + y^2$
3 (1đ)	Cho $f(z) = x^2 + 2x^3 - y^2 + i(2xy + 3y^2)$. Tính $f'(z)$ tại: $z_1 = 1 + i\sqrt{2}; z_2 = -1 + i; z_3 = 1 + i\sqrt{3}$; nếu có.	$f'(z_2) = 4 + 2i$
4 (1đ)	Tính: $I = \int_0^{1+2i} (x - iy) dz$ dọc theo: (d) : $y = 2x$	$I = \frac{5}{2}$
5 (1đ)	Tính tích phân: $I = \int_C \frac{z^2 + 1}{(z-2)(z-4)^2} dz$. $C : z-2 = 1$;	$I = \frac{5\pi i}{2}$.
6 (1đ)	Trong các hàm sau, hàm nào là hàm điều hòa? $U = x^2y - xy^2; H = x^3 + xy; G = x^3y - xy^3 - 3xy$	Hàm điều hòa là: G
7 (1đ)	Tìm hàm giải tích trong các hàm sau, nếu có? $f = x + y + 2xy + (-x + y - x^2 + y^2)i$ $k = -x + y + 4xy + (-x - y + 2x^2 + 2y^2)i$	Hàm giải tích là: f
8 (1đ)	Cho $\cos x = \frac{2}{\sqrt{5}}; 270^\circ < x < 360^\circ$. Tìm $\sin x$? và $\tan x$?	$a / \sin x = -\frac{1}{\sqrt{5}} \quad b / \tan x = -\frac{1}{2}$

Phần 2: PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE

9 / (1đ). Tìm $L\{\cos^2 3t\} = L\left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 6t\right\} = \frac{1}{2z} + \frac{1}{2} \cdot \frac{z}{z^2 + 36}$.

10/ (1đ). Tìm $L^{-1}\left\{\frac{7}{(z+2)^2 + 25}\right\} = e^{-2t} L^{-1}\left\{\frac{7}{z^2 + 25}\right\} = \frac{7}{5} e^{-2t} \sin 5t$.

GV1:.....

THI HK1 KHÓA 18
Môn: TOÁN CHUYÊN ĐỀ
(Tg 60 phút. SV không sử dụng tài liệu)

GV2:.....

Phần 1: HÀM BIẾN SỐ PHỨC

CÂU	ĐỀ 6	ĐÁP ÁN
1 (1đ)	Giải phương trình: $e^z = (\sqrt{3} - i)(1 - i\sqrt{3})$.	$z = \ln 4 + (-\frac{\pi}{2} + k2\pi)i$.
2 (1đ)	Cho hàm $u = -x - y - 2xy$. Tìm hàm v sao cho $f(z) = u + iv$ giải tích.	$v = x + x^2 - y - y^2$.
3 (1đ)	Tính đạo hàm của $f(z) = -2x^2 + y^2 + (-2xy + y^2)i$ tại: $z_1 = 1 - 3i, z_2 = 1 + i, z_3 = 1 + 2i$ nếu có.	$\bar{\exists} f'(z_{1,2,3})$
4 (1đ)	Tính: $I = \int_0^{1+2i} (x - iy) dz$ dọc theo: $(P): y = 2x^2$	$I = \frac{5}{2} + \frac{2i}{3}$
5 (1đ)	Tính tích phân: $I = \int_C \frac{z^2 - 3}{(z+1)^2(z-3)} dz$. $C: z-3 =1$	$I = \frac{3\pi i}{4}$
6 (1đ)	Trong các hàm sau, hàm nào là hàm điều hòa? $U = e^x \sin y - y^2 + x^2; H = y^2 + x^2 + e^y \cos x; G = e^y \sin x + x^2$.	Hàm điều hòa là: U
7 (1đ)	Tìm hàm giải tích trong các hàm sau, nếu có? $f = x + 2y + 2xy + (2x + x^2 + y + y^2)i$. $h = -2y + y^2 - x - x^2 + (-y + 2x - 2xy)i$.	Hàm giải tích là: h
8 (1đ)	Cho $\tan x = \frac{3}{\sqrt{5}}; 180^\circ < x < 270^\circ$. Tìm $\cos x$? và $\sin x$?	$a / \cos x = -\frac{\sqrt{70}}{14} \quad b / \sin x = -\frac{3\sqrt{14}}{14}$

Phần 2: PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE

9 / (1đ). Tìm $L\{\sin^2 2t\} = L\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4t\right\} = \frac{1}{2z} - \frac{1}{2} \cdot \frac{z}{z^2 + 16}$.

10/ (1đ). Tìm $L^{-1}\left\{\frac{5}{(z-2)^2 + 9}\right\} = e^{2t} L^{-1}\left\{\frac{5}{z^2 + 9}\right\} = \frac{5}{3} e^{2t} \sin 3t$.

MỘT SỐ CÔNG THỨC LIÊN QUAN.

1/Công thức lượng giác

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}; \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}; \cos^3 x = \frac{3 \cos x + \cos 3x}{4}; \sin^3 x = \frac{3 \sin x - \sin 3x}{4};$$

$$\cos a \cos b = \frac{\cos(a-b) + \cos(a+b)}{2}; \sin a \sin b = \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2}; \sin a \cos b = \frac{\sin(a-b) + \sin(a+b)}{2};$$

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b; \sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \sin b \cos a.$$

2/Điều kiện Cauchy-Riemann:

$$(C-R) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \cdot (1) \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \cdot (2) \end{cases} \text{ và } f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}; \forall z \in (C-R)$$

$f(z) = u + iv$ gọi là hàm giải tích nếu u và v thỏa mãn điều kiện $(C-R) \forall (x, y)$ hay $\forall z$.

3/ Hàm $\phi(x, y)$ gọi là hàm điều hòa nếu thỏa mãn phương trình Laplace:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0, \forall (x, y).$$

4/Công thức tích phân Cauchy:

$$\int_c \frac{f(z) dz}{z - z_0} = 2\pi i f(z_0); \int_c \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^2} = 2\pi i f'(z_0); \dots; \int_c \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}} = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0).$$

5/Công thức hàm ảnh, hàm gốc:

Nếu $L\{f(t)\} = F(z)$ thì

$$a / L\{kf(t)\} = kL\{f(t)\}; L\{F(z) + G(z)\} = L\{F(z)\} + L\{G(z)\}$$

$$b / L\{e^{at} f(t)\} = F(z - a) \Leftrightarrow L^{-1}\{F(z)\} = e^{at} L^{-1}\{F(z + a)\} = e^{-at} L^{-1}\{F(z - a)\}$$

$$c / L\{f(t-a)u(t-a)\} = e^{-az} F(z) \Leftrightarrow L^{-1}\{e^{-az} F(z)\} = f(t-a)u(t-a)$$

Bảng hàm gốc – hàm ảnh thông dụng

	$f(t)$	$F(z)$		$f(t)$	$F(z)$
1	1	$\frac{1}{z}$	5	$\sin at$	$\frac{a}{z^2 + a^2}$
2	t^n	$\frac{n!}{z^{n+1}}$	6	$\cos at$	$\frac{z}{z^2 + a^2}$
3	e^{at}	$\frac{1}{z - a}$	7	$\sinh at$	$\frac{a}{z^2 - a^2}$
4	t	$\frac{1}{z^2}$	8	$\cosh at$	$\frac{z}{z^2 - a^2}$

$$\text{Với: } \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}; \cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$